ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours BCPST, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

EXERCICE

Pour tout entier naturel n, on pose

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$

1. (a) Soit $n \geqslant 2$; trouver une relation entre w_n et w_{n-2}.
   (b) En déduire une expression de w_{2n}, en fonction de n, à l'aide de factorilles.
2. (a) Montrer que la suite $(nw_nw_{n-1})_n$ est constante.
   (b) Vérifier que la suite $(w_n)_n$ est décroissante.
   (c) Montrer que $w_n \sim w_{n+1}$.
   (d) En déduire que $w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^n \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt$ est convergente.
4. Soit p un entier naturel.
   (a) Exprimer a_{2p} en fonction de w_{2p}.
   (on pourra utiliser le changement de variable $\tan\theta = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$).
   (b) En déduire une expression de a_{2p} , en fonction de p, à l'aide de factorilles.
   (c) Donner alors un équivalent de a_{2p}.

PREMIER PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; on rappelle que $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que f n'admet qu'une seule valeur propre notée α.
   (b) Caractériser le sous-espace propre de f associé à la valeur propre α. Quelle est sa dimension ?
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   (d) On pose $u_1 = e_1,\ u_2 = (f - \alpha\, id)(u_1)$ et $u_3 = 2e_1 + e_3$.

i. Montrer que u_2 et u_3 sont des éléments de $\mathrm{Ker}\,(f - \alpha\, id)$.
ii. Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Écrire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
   (b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}_1$ et calculer P^{-1}.
   (c) Exprimer alors A à l'aide des matrices $B,\ P$ et P^{-1}.

3. On pose $J = I + B$ où I est la matrice identité d'ordre 3.
   (a) Calculer J^2.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = (-1)^k(I - kJ)$.
   (c) En déduire l'expression de A^k pour tout entier naturel non nul k.

4. On considère trois fonctions $u,\ v$ et w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$(S)\ \begin{cases} u'(t) = -2u(t) + 5v(t) + 2w(t) \\ v'(t) = -u(t) + 4v(t) + 2w(t) \\ w'(t) = 2u(t) - 10v(t) - 5w(t) \end{cases}$$

   (a) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(t) = (u(t), v(t), w(t)).$$

   On rappelle que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = (u'(t), v'(t), w'(t))$.
   Montrer que le système (S) équivaut à l'équation différentielle

$$(E) \quad \varphi'(t) = f(\varphi(t)).$$

   (b) On écrit $\varphi(t) = x(t)u_1 + y(t)u_2 + z(t)u_3$.
   Montrer que l'équation différentielle (E) équivaut au système

$$(S')\ \begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ z'(t) = -z(t) \end{cases}$$

   (c) On suppose que $u(0) = v(0) = 0$ et que $w(0) = 1$; calculer alors $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$.
   (d) Résoudre le système (S') avec les conditions initiales $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ trouvées à la question précédente.
   (e) En déduire la solution de (S) vérifiant les conditions initiales $u(0) = v(0) = 0$ et $w(0) = 1$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème, on considère les deux matrices réelles $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}$ où b est un réel non nul.

1. (a) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices réelles d'ordre 2 qui commutent avec F est un espace vectoriel.(On rappelle que $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \ MF = FM\}$.)
   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque réelle d'ordre 2 ; déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $x,\ y,\ z$, et t pour que M appartienne à $\mathcal{C}$.

(c) Lorsque M est élément de $\mathcal{C}$, montrer qu'il existe deux réels u et v tels que $M = uI + vF$.

(d) En déduire que (I, F) est une base de $\mathcal{C}$.

2. (a) Prouver l'existence de deux réels α_2 et β_2 tels que $F^2 = \alpha_2 F + \beta_2 I$. Pour cela, on calculera α_2 et β_2 en fonction de $a,\ b$ et c.

(b) Plus généralement, pour tout entier naturel n, prouver l'existence de deux réels α_n et β_n tels que $F^n = \alpha_n F + \beta_n I$.

(c) Déterminer une relation de récurrence entre $\alpha_{n+2},\ \alpha_{n+1}$ et α_n.

(d) Déterminer α_n lorsque : $a = 3,\ b = -2$ et $c = -2$.

(e) Déterminer α_n lorsque : $a = 3,\ b = 1$ et $c = 1$.

3. (a) Prouver que $\mathcal{C}$ est stable par le produit matriciel.

(b) Caractériser les matrices inversibles éléments de $\mathcal{C}$?

(c) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $a,\ b$ et c les éléments non nuls de $\mathcal{C}$ sont tous des matrices inversibles.

(d) Dans le cas où $a = 3,\ b = -2$ et $c = -2$, y'a t-il dans $\mathcal{C}$ des matrices non inversibles ? Sioui, lesquelles ? .

4. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{C}$ défini par $\Phi(M) = FM$.

(a) Justifier que Φ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ si et seulement si F est inversible.

(b) Déterminer la matrice G de Φ relativement à la base (I, F) de $\mathcal{C}$.

(c) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $a,\ b$ et c l'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

FIN DE L'ÉPREUVE